Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I

Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

FUNDACIÓ COL·LEGIS DIOCESANS SANT VICENT MÀRTIR

MAT_3 tema 8. Cuerpos geométricos

1. POLIEDROS

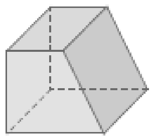
1.1. Indica el número de caras, vértices y aristas de un tetraedro regular y de un octaedro regular. Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.

Un tetraedro regular tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 4 + 4 = 6 + 2.

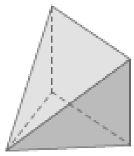
Un octaedro regular tiene 8 caras, 6 vértices y 12 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 8 + 6 = 12 + 2.

1.2. Clasifica los siguientes poliedros y comprueba que en todos los casos se cumple la fórmula de Euler.

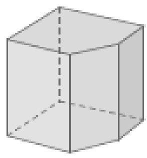
a)



b)



c)



a) El poliedro es un prisma cuadrangular recto.
Tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 6 + 8 = 12 + 2.

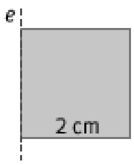
b) El poliedro es una pirámide cuadrangular oblicua.
Tiene 5 caras, 5 vértices y 8 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 5 + 5 = 8 + 2.

c) El poliedro es un prisma pentagonal recto.
Tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 8 + 12 = 18 + 2.

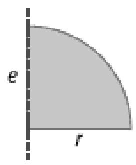
2. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

2.1. Describe los cuerpos de revolución obtenidos al girar estas figuras alrededor del eje e. Indica sus elementos.

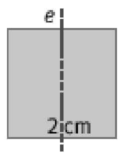
a)



b)



c)



a) Se obtiene un cilindro de altura 2 cm y cuyo radio de la base mide 2 cm.

b) Se obtiene una semiesfera de radio *r*.

c) Se obtiene un cilindro de 2 cm de altura y cuyo radio de la base mide 1 cm.

Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I

Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

2.2 Describe los cuerpos de revolución, y sus elementos, que se obtienen al girar:

a) **Un triángulo equilátero de 5 cm de lado alrededor de su altura.**

b) **Un triángulo rectángulo de 10 cm de altura alrededor de su base.**

c) **Un trapecio isósceles de lados 5 cm, 5 cm, 7 cm y 11 cm alrededor de un eje que pasa por los medios de las bases.**

a) Se obtiene un cono de $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm de altura, cuya generatriz mide 5 cm y el radio de la base 2,5 cm.

b) Se obtiene un cono de 10 cm de altura.

c) Se obtiene un tronco de cono de $\sqrt{21}$ cm de altura, cuyas bases mayor y menor tienen 5,5 y 3,5 cm d respectivamente.

3. ÁREAS Y VOLÚMENES DE POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

3.1. Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos.

a) **Un cubo de 10 cm de arista.**

b) **Un prisma regular de 10 cm de altura, cuya base es un cuadrado de 20 cm de lado.**

c) **Un cilindro de 10 cm de radio de la base y altura igual al diámetro de la base.**

d) **Un cono de 8 cm de radio de la base y 16 cm de altura.**

e) **Una esfera de 10 m de diámetro.**

a) $A_T = A_L + 2A_B = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 = 400 + 200 = 600 \text{ cm}^2$

$V = A_B \cdot h = 10^2 \cdot 10 = 1000 \text{ cm}^3$

b) $A_T = A_L + 2A_B = 4 \cdot 20 \cdot 10 + 2 \cdot 20^2 = 800 + 800 = 1600 \text{ cm}^2$

$V = A_B \cdot h = 20^2 \cdot 10 = 4000 \text{ cm}^3$

c) $A_T = A_L + 2A_B = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 1256{,}64 + 628{,}32 = 1884{,}96 \text{ cm}^2$

$V = A_B \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 10 = 6283{,}19 \text{ cm}^3$

d) La generatriz se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{16^2 + 8^2} = 17{,}89$ cm

$A_T = A_L + A_B = \pi \cdot 8 \cdot 17{,}89 + \pi \cdot 8^2 = 449{,}62 + 201{,}06 = 650{,}68 \text{ cm}^2$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{201{,}06 \cdot 16}{3} = 1072{,}32 \text{ cm}^3$$

e) $A_T = 4\pi \cdot 5^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}60 \text{ cm}^3$$

3.2. Calcula el área de estos cuerpos geométricos:

a) **Un ortoedro de dimensiones 15 × 18 × 22 cm.**

b) **Un prisma regular de 3 m de altura y de base pentagonal de 50 m de perímetro de la base y 6,88 m de apotema.**

c) **Una pirámide regular de 5 dm de altura y cuya base es un triángulo equilátero de 5 dm de lado.**

d) **Un cilindro de 20 cm de altura y cuyo perímetro de la base mide 22π cm.**

e) **Un cono de 8 cm de altura y cuyo radio de la base mide 4 cm.**

f) **Una esfera cuya circunferencia máxima tiene un perímetro de 45 mm.**

a) $A = 2 \cdot 15 \cdot 18 + 2 \cdot 15 \cdot 22 + 2 \cdot 18 \cdot 22 = 540 + 660 + 792 = 1992 \text{ cm}^2$

b) $A_T = A_L + 2A_B = 5 \cdot 10 \cdot 3 + 2 \cdot \dfrac{50 \cdot 6{,}88}{2} = 150 + 344 = 494 \text{ cm}^2$

c) La altura de cada cara se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33$ dm

$A_T = 4 \cdot \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 43{,}3 \text{ dm}^2$

d) Llamando r al radio de la base, se cumple que $2 \cdot \pi \cdot r = 22\pi \Rightarrow r = 11$ cm.

$A_T = A_L + 2A_B = 22\pi \cdot 20 + 2 \cdot \pi \cdot 11^2 = 1382{,}30 + 760{,}27 = 2142{,}57 \text{ cm}^2$

e) La generatriz se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94$ cm

$A_T = A_L + A_B = \pi \cdot 4 \cdot 8{,}94 + \pi \cdot 4^2 = 112{,}34 + 50{,}27 = 162{,}61 \text{ cm}^2$

f) Llamando r al radio de la esfera, se cumple que $2 \cdot \pi \cdot r = 45 \Rightarrow r = 7{,}16$ mm.

$A = 4 \cdot \pi \cdot 7{,}16^2 = 644{,}58 \text{ mm}^2$

3.3. Halla el volumen de estos cuerpos geométricos.

a) **Un ortoedro de dimensiones 22 × 10 × 15 cm.**

b) **Un prisma regular de 22 m de altura cuya base es un cuadrado de 16 m de lado.**

c) **Una pirámide recta de 15 dm de altura cuya base es un rectángulo de 60 dm de perímetro y con una dimensión doble de la otra.**

d) **Un cilindro de 15 cm de radio de la base y altura igual al perímetro de la base.**

e) **Un cono de 60 dm de radio de la base y 65 dm de generatriz.**

f) **Una esfera cuya circunferencia máxima tiene un perímetro de 125 mm.**

a) $V = 22 \cdot 10 \cdot 15 = 3300 \text{ cm}^3$

b) $V = A_B \cdot h = 16^2 \cdot 22 = 5632 \text{ m}^3$

c) Llamando x y $2x$ a las dimensiones del rectángulo de la base.

$x + x + 2x + 2x = 60 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow$ Las dimensiones del rectángulo de la base son 10 x 20 dm.

$V = \dfrac{10 \cdot 20 \cdot 15}{3} = 1000 \text{ dm}^3$

d) $V = A_B \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 15 = 66\,619{,}83 \text{ cm}^3$

e) La altura del cono se calcula aplicando el teorema de Pitágoras $h=\sqrt{65^2-60^2}=25$ cm

$$V=\frac{\pi\cdot 60^2\cdot 25}{3}=94\,247{,}78\ \text{dm}^3$$

f) Llamando r al radio de la esfera, se cumple que $2\cdot\ \pi\ \cdot r=125\Rightarrow r=19{,}89$ mm

$$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 19{,}89^3=32\,960{,}44\ \text{mm}^3$$

3.4. Dibuja el desarrollo plano de los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área total.

a) Un cubo de 5 cm de arista.

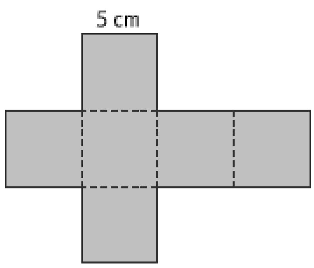
b) Un ortoedro de dimensiones 3 × 3 × 6 cm.

c) Una pirámide regular de 5 cm de arista lateral y cuya base es un triángulo equilátero de 3 cm de lado.

d) Un cilindro de 2 cm de radio de la base y 4 cm de altura.

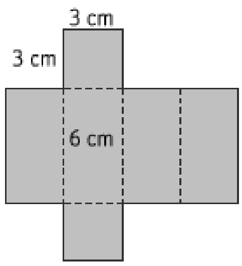
e) El cono obtenido al girar un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm alrededor del cateto mayor.

a) Cubo.



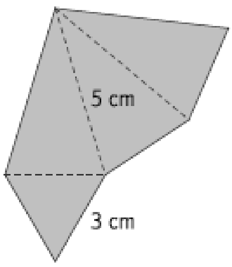
$$A=6\cdot 5^5=150\ \text{cm}^2$$

b) Ortoedro.



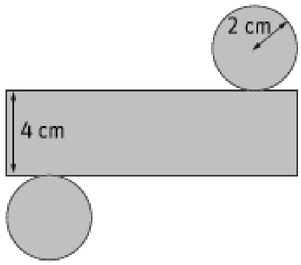
$$A=2\cdot 3^5+4\cdot 3\cdot 6=90\ \text{cm}^2$$

c) Pirámide.



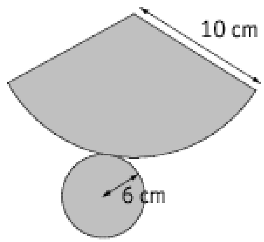
$$A=\frac{3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}+3\cdot\frac{3\cdot\frac{\sqrt{91}}{2}}{2}=25{,}36\ \text{cm}^2$$

d) Cilindro.



$$A=2\pi\cdot 2^2+2\pi\cdot 2\cdot 4=75{,}4\ \text{cm}^2$$

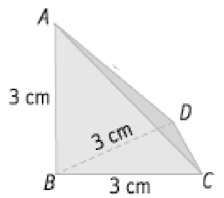
e) Cono.



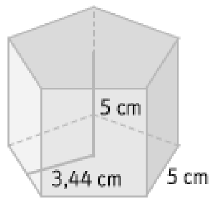
$$A=\pi\cdot 6^2+\pi\cdot 6\cdot 10=301{,}6\ \text{cm}^2$$

3.5. Para cada una de las siguientes figuras, dibuja su desarrollo plano y calcula su área y su volumen.

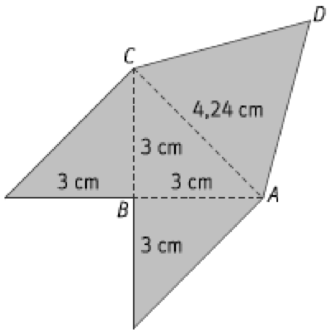
a)



b)



a) Pirámide inscrita en un cubo de arista 3.



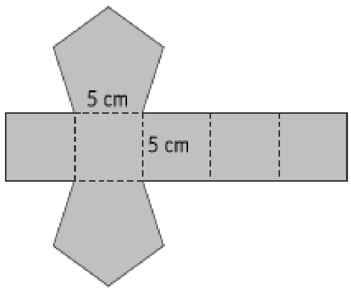
El triángulo ACD es equilátero de lado $3\sqrt{2}$.

La altura de la cara de este triángulo es $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

$$A_t = 3\cdot\frac{3\cdot 3}{2}+\frac{3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{2}}{2} = 21{,}29 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\frac{3\cdot 3}{2}\cdot 3}{3} = 4{,}5 \text{ cm}^3$$

b) Prisma pentagonal.



$$A_B = \frac{5\cdot 5\cdot 3{,}44}{2} = 43 \text{ cm}^2$$

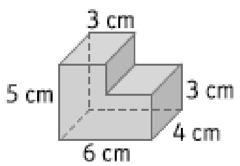
$$A_L = 5\cdot 5\cdot 5 = 125 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 43\cdot 2 + 125 = 211 \text{ cm}^2$$

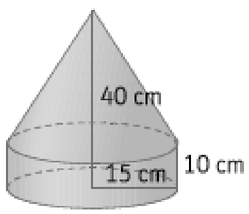
$$V = A_B\cdot h = 43\cdot 5 = 215 \text{ cm}^3$$

3.6. Calcula el volumen de las siguientes figuras.

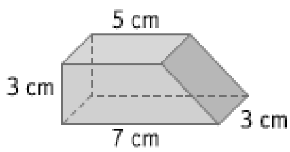
a)



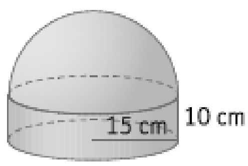
b)



c)



d)



a) $V = V_{\text{ortoedro grande}} - V_{\text{ortoedro pequeño}} = 5\cdot 6\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 4 = 120 - 24 = 96 \text{ cm}^3$

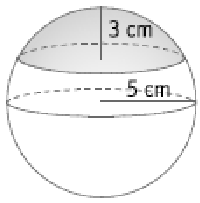
b) $V = V_{\text{cono}} + V_{\text{cilindro}} = \dfrac{\pi\cdot 15^2\cdot 30}{3} + \pi\cdot 15^2\cdot 10 = 7068{,}58 + 7068{,}58 = 14\,137{,}16 \text{ cm}^3$

c) $V = \dfrac{7+5}{2}\cdot 3\cdot 3 = 54 \text{ cm}^3$

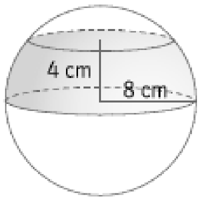
d) $V = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{cilindro}} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi\cdot 15^3}{2} + \pi\cdot 15^2\cdot 10 = 7068{,}58 + 7068{,}58 = 14\,137{,}16 \text{ cm}^3$

3.7. Halla el área de cada una de las siguientes partes de la esfera.

a)



b)



a) La parte de la esfera sombreada es un casquete esférico.

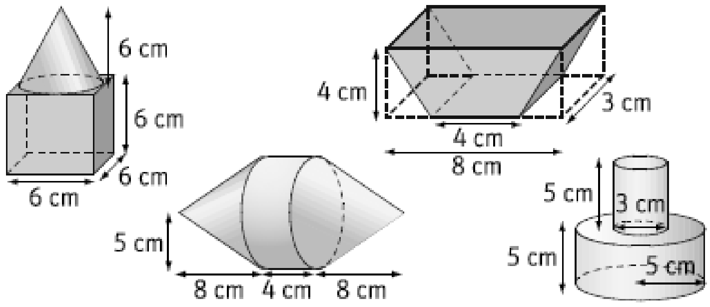
$A = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 94{,}25\ \text{cm}^2$

b) La parte de la esfera sombreada es una zona esférica.

$A = 2\pi \cdot 8 \cdot 4 = 201{,}06\ \text{cm}^2$

4. ÁREAS Y VOLÚMENES DE OTROS CUERPOS GEOMÉTRICOS

4.1. Calcula el área y el volumen de las siguientes figuras.



a) La generatriz del cono se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6{,}71$ cm

$A_T = A_{T\,cubo} + A_{L\,cono} - A_{B\,cono} = 6 \cdot 6^2 + \pi \cdot 3 \cdot 6{,}71 - \pi \cdot 3^2 = 216 + 63{,}24 - 28{,}27 = 250{,}97\ \text{cm}^2$

$V = V_{cono} + V_{cubo} = \dfrac{28{,}27 \cdot 6}{3} + 6^3 = 272{,}54\ \text{cm}^3$

b) La generatriz del cono se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9{,}43$ cm

$A_T = 2 \cdot A_{L\,cono} + A_{L\,cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 9{,}43 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 4 = 296{,}25 + 125{,}66 = 421{,}91\ \text{cm}^2$

$V = 2 \cdot V_{cono} + V_{cilindro} = 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 8}{3} + \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 418{,}88 + 314{,}16 = 733{,}04\ \text{cm}^3$

c) El lado oblicuo del trapecio isósceles de la cara lateral mide $d = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47$ cm

$A_T = A_B + A_b + 2 \cdot A_{trapecio} + 2 \cdot A_{rectángulo} = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot \dfrac{8+4}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4{,}47 = 24 + 12 + 48 + 26{,}83 =$
$= 110{,}83\ \text{cm}^2$

$V = V_{ortoedro} - 2 \cdot V_{prisma} = 3 \cdot 8 \cdot 4 - 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 96 - 24 = 72\ \text{cm}^3$

d) $A_T = A_{T\,cilindro\ inferior} + A_{L\,cilindro\ superior} = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 + 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 5 = 157{,}08 + 157{,}08 + 47{,}12 = 361{,}28\ \text{cm}^2$

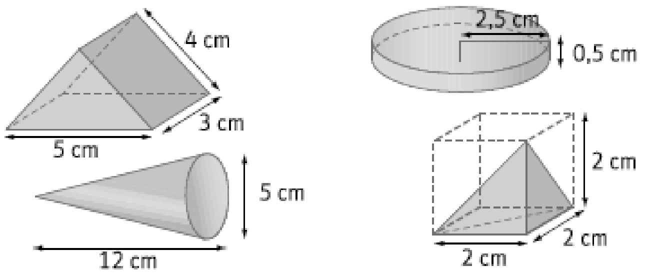
$V = V_{cilindro\ inferior} + V_{cilindro\ superior} = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 + \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 392{,}70 + 35{,}34 = 428{,}04\ \text{cm}^3$

Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I

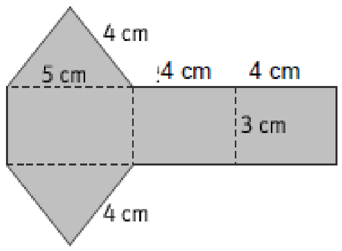
Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

FUNDACIÓ COL·LEGIS DIOCESANS SANT VICENT MÀRTIR

4.2. Clasifica los siguientes cuerpos geométricos, dibuja su desarrollo plano y calcula su área total.

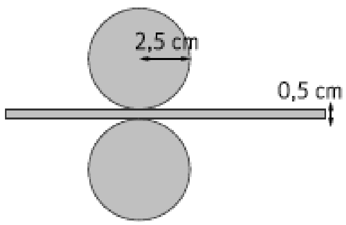


a) Prisma triangular recto.



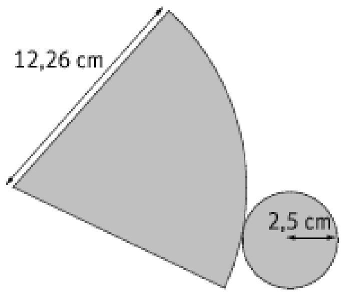
$A_t = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{3{,}12 \cdot 5}{2} = 54{,}6 \text{ cm}^2$

c) Cilindro recto.



$A_t = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 2{,}5^2 \cdot \pi = 47{,}12 \text{ cm}^2$

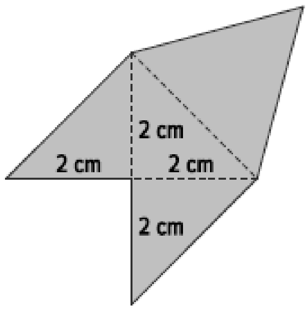
b) Cono recto.



La generatriz mide: $g = \sqrt{12^2 + 2{,}5^2} = 12{,}26$ cm

$A_t = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 12{,}26 + \pi \cdot 2{,}5^2 = 115{,}92 \text{ cm}^2$

d) Pirámide triangular oblicua.

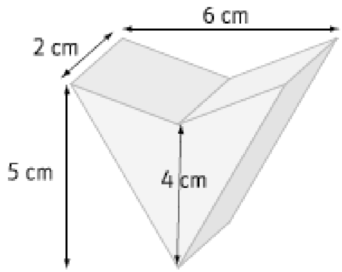


El triángulo oblicuo es equilátero de lado $2\sqrt{2}$.

La altura de la cara de este triángulo es $\sqrt{6}$.

$A_t = 3 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = 6 + \sqrt{12} = 9{,}46 \text{ cm}^2$

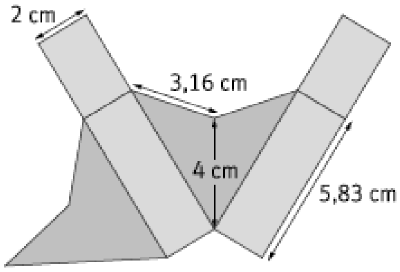
4.3. Dibuja un desarrollo plano y calcula el área y el volumen del cuerpo geométrico. Clasifícalo.



La figura es un prisma recto cuya base es un trapezoide.

El lado superior del trapezoide mide, aplicando el teorema de Pitágoras, $\sqrt{3^2+1^2} = 3{,}16$ cm.

El lado oblicuo del trapezoide mide, aplicando el teorema de Pitágoras, $\sqrt{5^2+3^2} = 5{,}83$ cm.



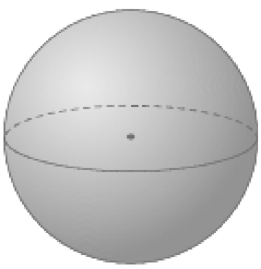
$$A_T = 2 \cdot (2 \cdot 3{,}15) + 2 \cdot (2 \cdot 5{,}83) + 4 \cdot \left(\frac{5 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2}\right) = 59{,}92 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2}\right) \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^3$$

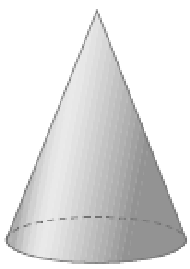
5. SIMETRÍAS EN CUERPOS GEOMÉTRICOS

5.1. Copia en tu cuaderno las siguientes figuras, e indica, si existen, un centro, un eje y un plano de simetría.

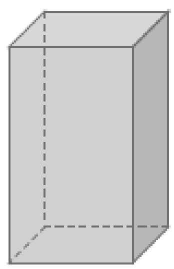
a)



b)



c)



a) Esfera:

- Tiene un centro de simetría, que es el centro de la esfera.
- Tiene infinitos ejes de simetría. Todos los ejes que pasan por el centro de la esfera.
- Tiene infinitos planos de simetría. Todos los planos que contengan al centro de la esfera.

b) Cono:

- No tiene centro de simetría.
- Tiene un eje de simetría. Eje que va del centro de la base al vértice del cono.
- Tiene infinitos planos de simetría. Cualquier plano que contenga al eje de simetría.

c) Ortoedro:

- Tiene centro de simetría, que es el centro del ortoedro.
- Tiene 3 ejes de simetría. Un eje es la recta perpendicular a las bases por su punto medio y dos ejes son las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras laterales.
- Tiene 3 planos de simetría. Un plano es el que pasa por los puntos medios de las aristas laterales y 2 planos que pasan por los puntos medios de las aristas de la base.

6. EL GLOBO TERRÁQUEO. COORDENADAS GEOGRÁFICAS

6.1. Dos puntos de la esfera terrestre están situados en el mismo meridiano y sus latitudes son de 40º N y 32º N. Calcula la distancia que los separa.

Hay que calcular la longitud de un arco de 40º – 32º = 8º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 8 = 889{,}56 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 889,56 km.

6.2. El radio medio de la Tierra es de 6371 km.

a) **Calcula la longitud del ecuador.**

b) **Calcula la superficie y el volumen de la Tierra.**

c) **Halla la superficie de uno de los casquetes polares, sabiendo que estos son el resultado de cortar la superficie terrestre por un plano a 5843 km de distancia del centro de la Tierra.**

a) $L = 2 \cdot \pi \cdot 6371 = 40\,030{,}17$ km

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot 6371^2 = 510\,064\,471{,}9 \text{ km}^2$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6371^3 = 1083\,206\,917\,000 \text{ km}^3$$

c) $A = 2\pi \cdot 6371 \cdot (6371 - 5843) = 21\,135\,931{,}66 \text{ km}^2$

6.3. Dos puntos del meridiano en el que se encuentra Nueva York tienen latitudes 40º N y 85º N. ¿Cuál es su distancia? (Radio de la Tierra: 6371 km)

Hay que calcular la longitud de un arco de 85º – 40º = 45 º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 45 = 5003{,}77 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 5003,77 km.

6.4. Dos puntos del meridiano de Greenwich tienen latitudes 40º S y 30º N. ¿Cuál es su distancia?

Hay que calcular la longitud de un arco de 30º – (–40º) = 70º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 70 = 7783{,}64 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 7783,64 km.

6.5. Dos puntos del ecuador tienen longitudes 40º O y 50º O. ¿Cuál es su distancia?

Hay que calcular la longitud de un arco de 50º – 40º = 10 º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 10 = 1111{,}95 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 1111,95 km.

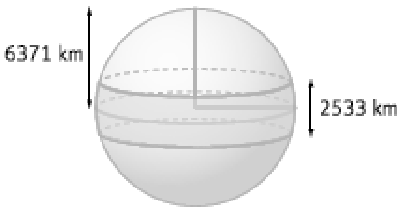
6.6. Dos puntos del ecuador tienen longitudes 30º O y 50º E. ¿Cuál es su distancia?

Hay que calcular la longitud de un arco de 50º – (–30º) = 80 º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 80 = 8895{,}59 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 8895,59 km.

6.7. Observa este esquema de la Tierra y determina qué superficie tiene la zona tropical.



$$A_{\text{zona tropical}} = 2 \cdot A_{\text{zona esférica}} = 2 \cdot 2\pi \; 6371 \cdot \frac{2533}{2} =$$
$$= 101\,396\,429{,}7 \text{ km}^2$$